





# Didaktik des gemeinsamen Lernens in heterogenen Gruppen anhand mathematischer Lernumgebungen

Differenzierte und individualisierte Angebote einerseits und ein gemeinsames Lernen an einem gemeinsamen Gegenstand auf unterschiedlichen Zugangsniveaus andererseits sind zwei zentrale Elemente einer inklusiven Didaktik.

Konkretisierung anhand mathematischer Lernumgebungen rund um das Pascalsche Dreieck unter Nutzung der Zugangsebenen.

**Walter Goschler (Akad. Rat)**  
Lernwerkstatt des Instituts für Sonderpädagogik

# Gemeinsamer Unterricht

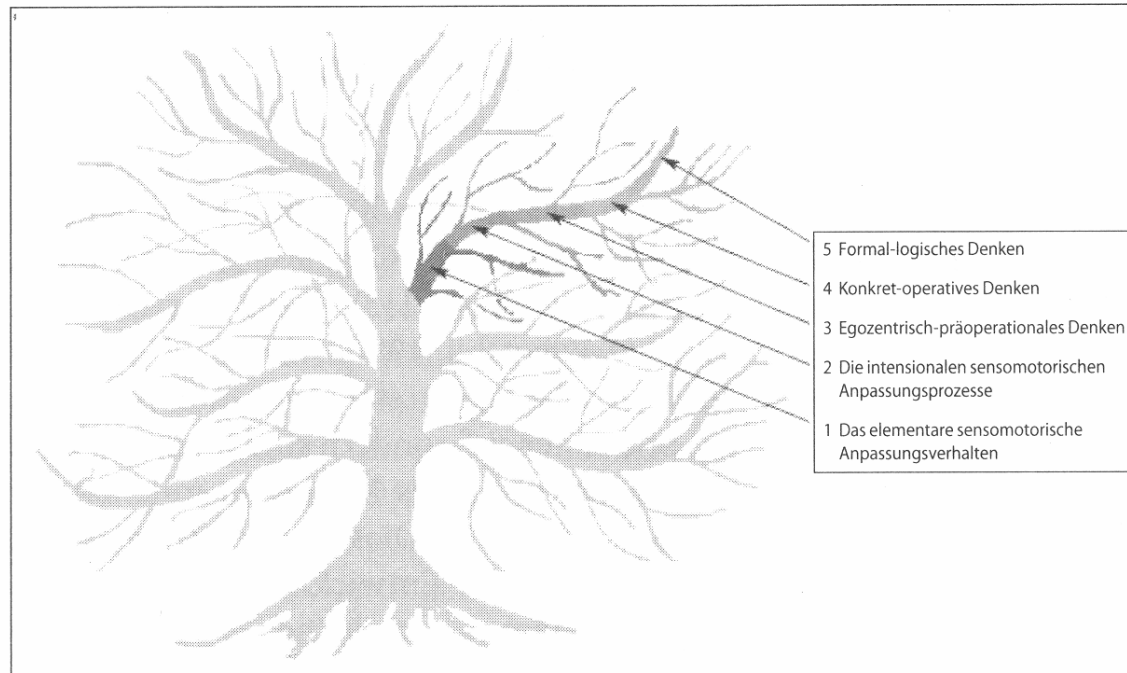
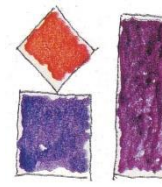
-  Lernen am gemeinsamen Lerngegenstand (Feuser 2005)
-  Lernen in Gemeinsamen Lernsituationen (Wocken 1998)
-  ... in exklusiv-individuellen Lernsituationen (Markowetz 2004)
-  „Wesentlich erscheint die didaktische Realisierung eines gemeinsamen Unterrichts in einer Schule für alle. Dieser gemeinsame Unterricht wird sich im Spannungsfeld zwischen Individualisierung und Differenzierung einerseits und einem gemeinsamen Lernen an einem gemeinsamen Gegenstand bewegen“ (Goschler 2012, 234 f.)

# Feuser-Definition



„Als integrativ bezeichne ich eine Allgemeine (kindzentrierte und basale) Pädagogik, in der alle Kinder und Schüler in Kooperation miteinander, auf ihrem jeweiligen Entwicklungsniveau, nach Maßgabe ihrer momentanen Wahrnehmungs-, Denk- und Handlungskompetenzen, in Orientierung auf die ‚nächste Zone ihrer Entwicklung‘, an und mit einem ‚gemeinsamen Gegenstand‘ spielen, lernen und arbeiten“

(Feuser 2005, 168)



(Feuser 2011, 95)

# Lernstrukturgitter nach Kutzer

Niveaustufen  
des Denkens

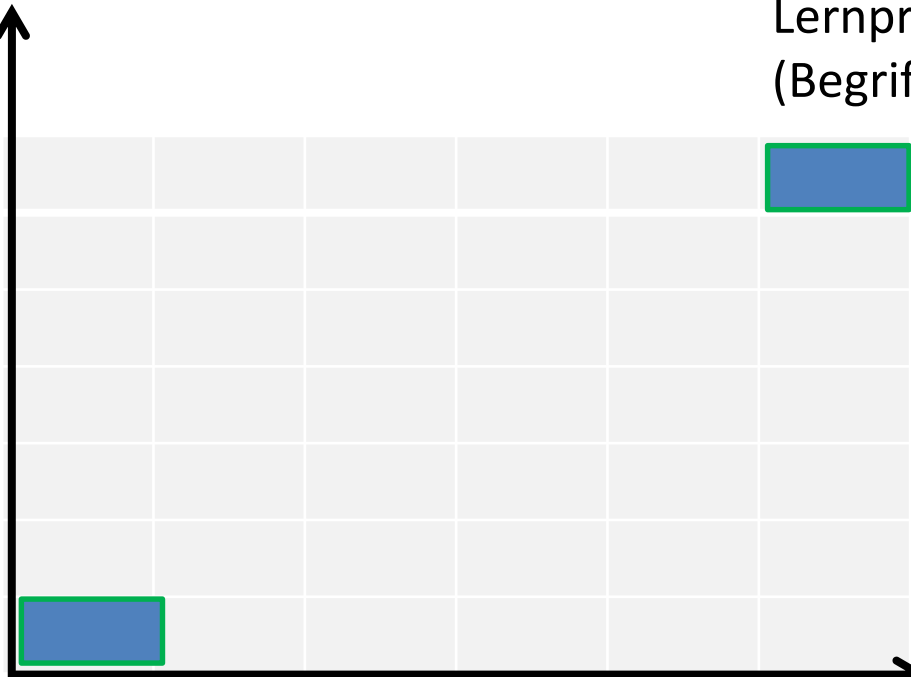
Endpunkt des  
Lernprozesses  
(Begriffe, Struktur)

abstrakt-begrifflich

anschaulich

konkret-  
gegenständlich

basal-perzeptiv



Einfache  
Struktur

Komplexe  
Struktur

Komplexität  
der Inhalte

(in Anlehnung an Kutzer 1998)



<b>abstrakt</b>	Zeitzone Gradnetz Kontinente Ozeane	Ozonloch Atmosphäre Luftschichten Sonnen- finsternis	Satelliten Mondlandung Raumfahrt	Infos über Planeten Missionen im All Raumfahrt ISS	Galaxien Milchstraße
<b>Symbolische Ebene / Darstellung</b>	ein Abbild der Erde ausmalen / Karte / Ozeane	Schaltjahr Sonne und Zeit (Beziehungen herstellen) Erdumlauf um die Sonne	Gezeiten Ebbe und Flut Einfluss des Mondes auf das Wasser erklären	Kenntnisse über andere Planeten gewinnen	Sternschnuppen Meteoriten Kometen
<b>Vollständig vorstellende Handlung</b>	Erde basteln Styroporkugel	Sonne = Leben auf der Erde Beziehungen zwischen Sonne und Natur (Wachstum)	Mondphasen: Warum Einzelne Phasen kennen Ein Daumenkino bauen	Größe und Abhängigkeiten von einzelnen Planeten kennen	Sternenbilder am Himmel
<b>teilweise vorstellende Handlung</b>	den Globus als Modell der Erde kennen lernen	Die Beziehun- gen zwischen Sonne Jahres- zeiten, Wärme und Verände- rung wahrneh- men (erklären)	Mond Modell (Krater und Meere) Warum leuchtet der Mond?	Modell des Sonnensystems kennen lernen	Polarstern / Kreuz des Südens Bedeutung Wo und wie finde ich sie?
<b>anschaulich/ praktische Handlung</b>	Eigenschaften des Planeten: – Naturbeob- achtung – Wetter – Leben auf der Erde	Tag und Nacht beobachten Sonnenauf- gang/Sonnen- untergang Planetarium	den Mond beobachten am Tag in der Nacht	andere Planeten kennen und beobachten	Das Planeten- system (Sonnen- system) kennen
	<i>Planet Erde</i>	<i>Sonne / Erde</i>	<i>Mond / Erde</i>	<i>ausgewählte Planeten</i>	<i>Planeten- system / Milchstraße</i>

# Inklusive Didaktik - Zugangsebenen



Zugang über Wahrnehmungsprozesse:  
basal-perzeptive Ebene



Zugang über Gegenständlichkeit, Handlung:  
konkret-gegenständliche Ebene

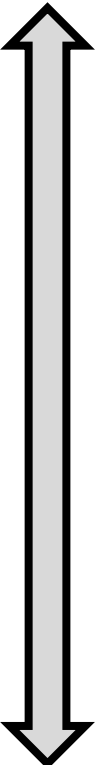


Zugang über Veranschaulichung, Symbolisierung:  
anschaulich-symbolische Ebene



Zugang über Abstraktion:  
abstrakt-begriffliche Ebene

(vgl. Goschler 2016, 131)




basal-perzeptiv			
konkret-gegenständlich			
anschaulich-symbolisch			
abstrakt-begrifflich			
Zugangsebenen	Thema 1	Thema 1+	Thema 1++

(vgl. Goschler 2016, 131)



# Bandbreite an subjektiven Zugangsweisen

 Von wesentlicher Bedeutung  
dabei ist die Beachtung der  
wechselseitigen Rekursion der  
unterschiedlichen  
Zugangsweisen und ihre  
vertikale bidirektionale  
Durchlässigkeit.  
(vgl. Goschler 2016, 131)

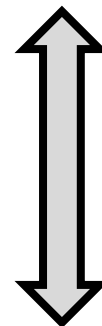


# Bandbreite an subjektiven Zugangsweisen



- wechselseitige Rekursion
- vertikale bidirektionale Durchlässigkeit.

Die abstrakt-begriffliche Ebene ist nicht den RegelschülerInnen oder den Hochbegabten vorbehalten und die SchülerInnen mit Beeinträchtigungen sind nicht an die basal-perzeptive oder konkret-gegenständliche Ebene gebunden.  
(vgl. Goschler 2016, 131)



basal-perzeptiv

konkret-gegenständlich

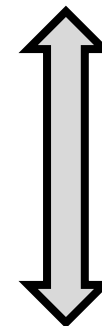
anschaulich-symbolisch

abstrakt-begrifflich

# Bandbreite an subjektiven Zugangsweisen



Die notwendige Dynamik von individuellen Lernprozessen auf Seiten des Subjektes ergibt sich aus der gegenseitigen Abhängigkeit der verschiedenen Zugangsweisen und den jeweils aufeinander bezogenen Ebenen.  
(vgl. Goschler 2016, 131)



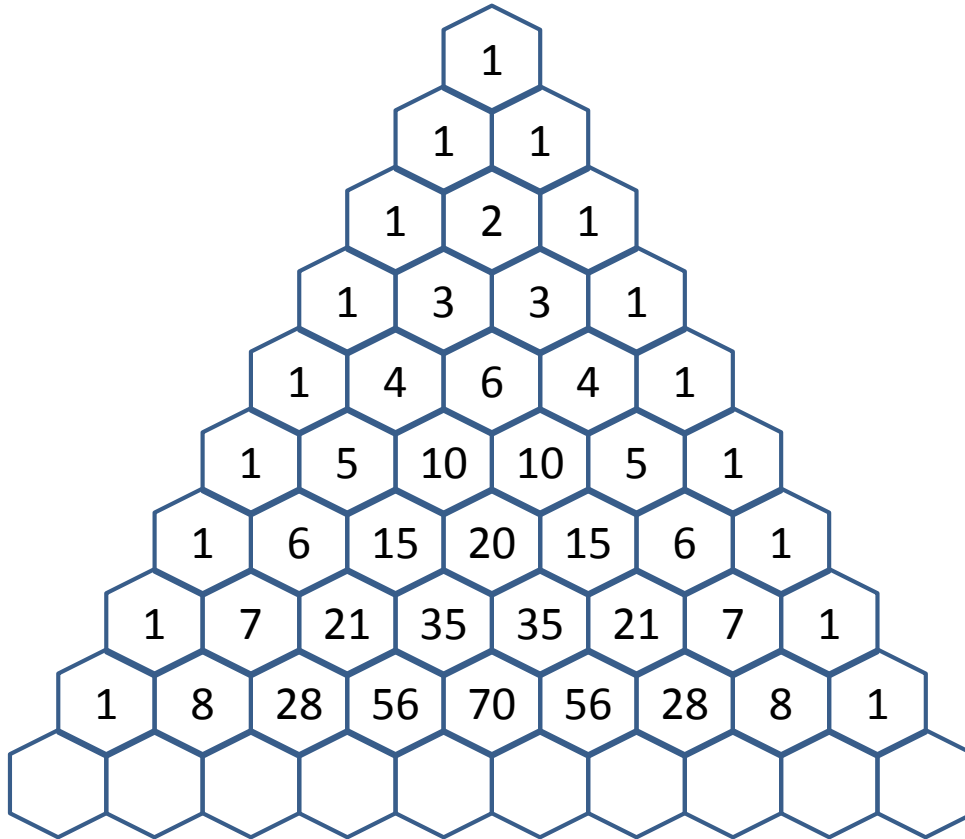
basal-perzeptiv

konkret-gegenständlich

anschaulich-symbolisch

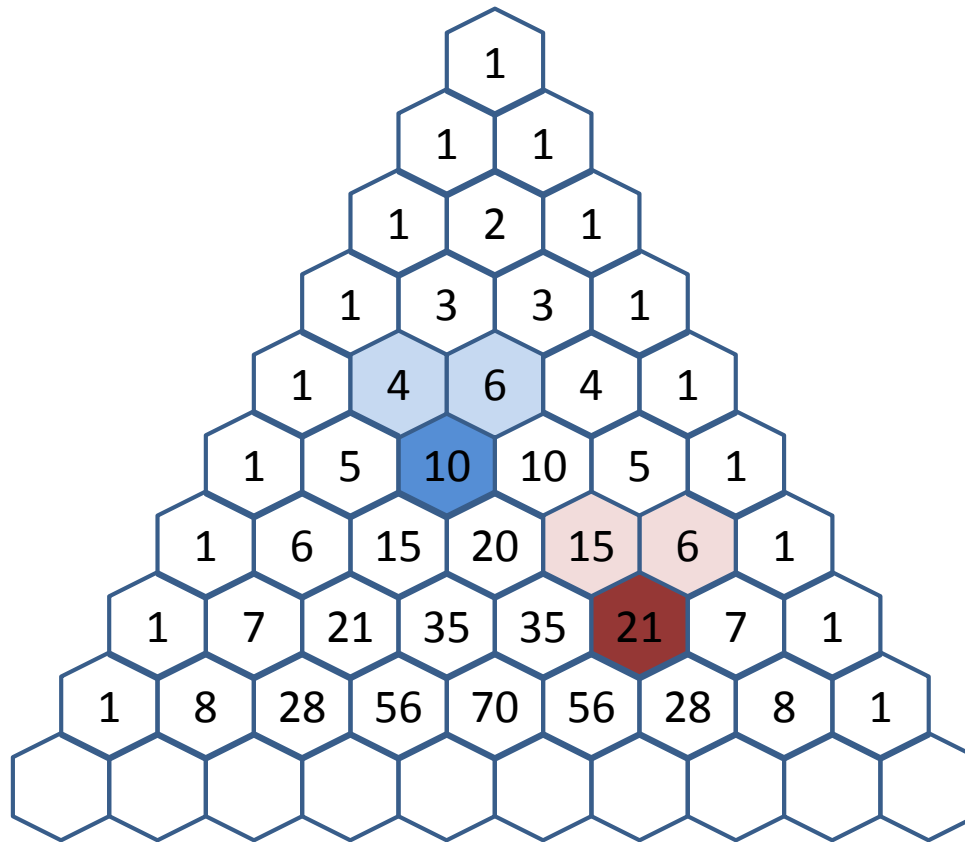
abstrakt-begrifflich

# Das Pascalsche Dreieck



(alle Grafiken und Abbildungen: Goschler 2017)

# Das Pascalsche Dreieck



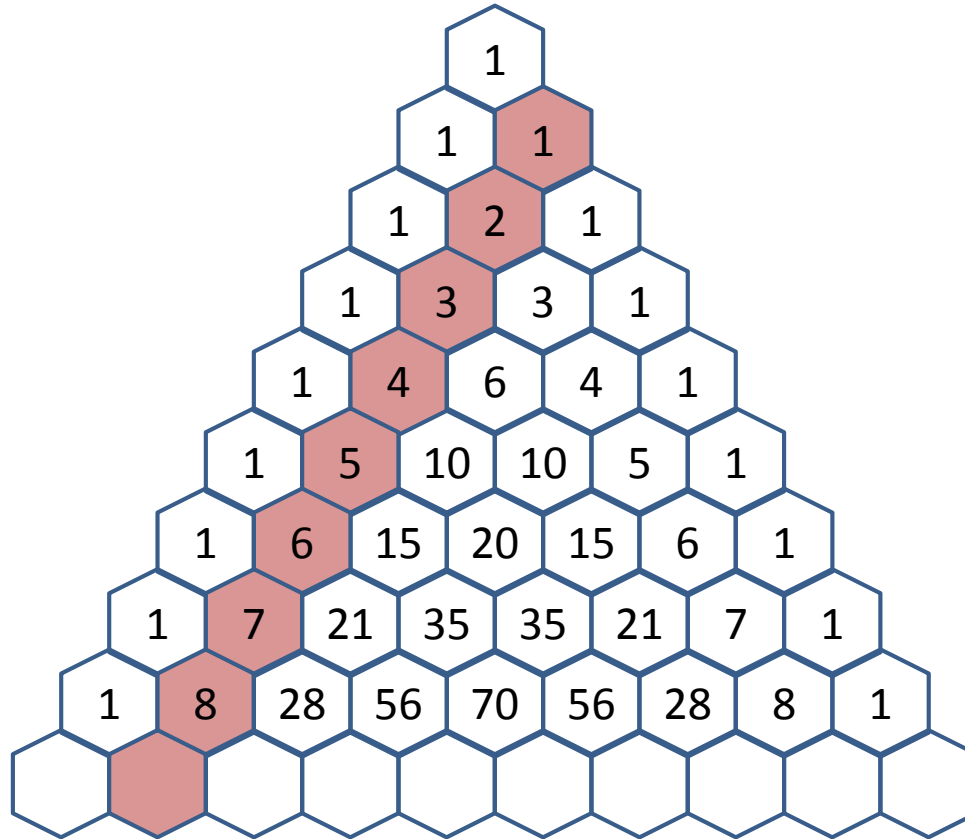
(alle Grafiken und Abbildungen: Goschler 2017)

# Das Pascalsche Dreieck – Mathematische Möglichkeiten

Zahlenmauern  
Reihe der natürlichen Zahlen  
Rechenmuster  
Zeilensummen verdoppeln sich  
Dreieckszahlen  
Tetraederzahlen  
Muster bei Teilbarkeit  
Symmetrie  
Fibonacci-Zahlen  
Binomialkoeffizienten

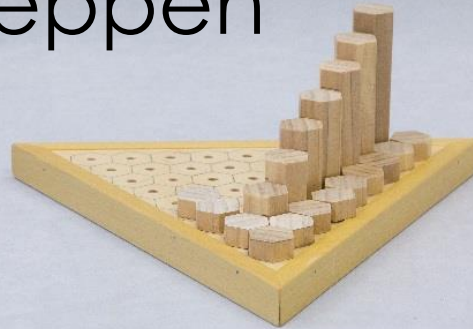


# Natürliche Zahlen



# Natürliche Zahlen

Zahlentreppen

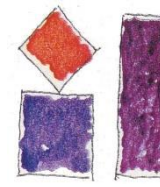


Skalierungen

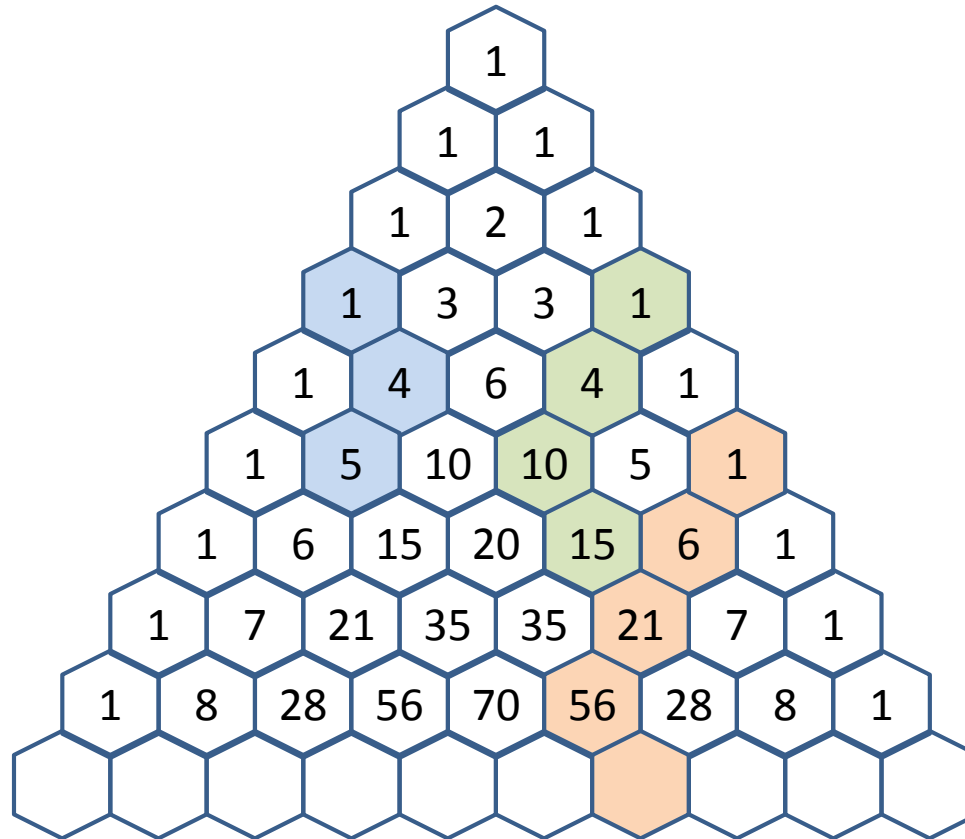


Größen bestimmen und  
tauschen



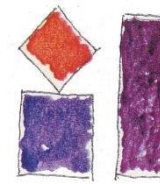


# Rechenmuster

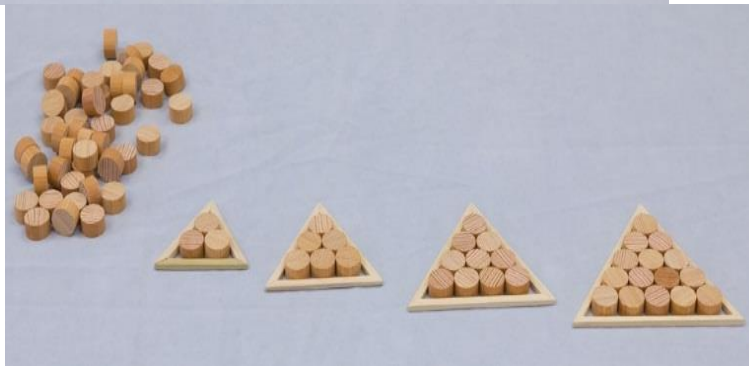
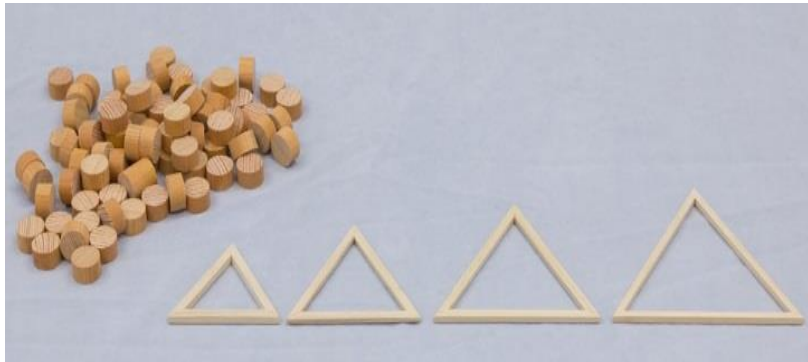








# Dreieckszahlen

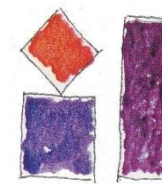






# Dreieckszahlen

Die hellblau  
markierten  
Zahlenwerte der  
Dreieckszahlen des  
dreidimensionalen  
Pascalschen Dreiecks  
in der  $k=2$ . Diagonale.



# Dreieckszahlen

basal-perzeptiv	<b>Wahrnehmen unterschiedlicher Längen und Größen und Größenbeziehungen. Vergleich von Größenbeziehungen.</b>
konkret- gegenständlich	<b>Herstellung der Anordnung nach der Größe mit den Stangen des dreidimensionalen Pascalschen Dreiecks durch den direkten Vergleich von einzelnen Stangen. Dies kann in Form einer Reihung oder durch Feststellung der jeweiligen Differenzen von Stange zu Stange durch Ergänzen der jeweils kleineren Stange mit Einerteilen durchgeführt werden.</b>
anschaulich- symbolisch	<b>Anordnung der dreidimensionalen Stangen oder der Zahlfelder der Papiervariante mit Ermittlung der jeweiligen Zahlenwerte und Feststellung der Differenzen zwischen den Feldern.</b>
abstrakt- begrifflich	<b>Anordnung nach der Größe. Reihung mit Zahlenwerten: <math>1 &lt; 3 &lt; 6 &lt; 10 &lt; 15</math> usw. Herstellung und arithmetische Berechnung der Unterschiede der Dreieckszahlen von einer zur nächsten in der Anordnung nach der Größe.</b>

Zugangsebenen zu den Dreieckszahlen in einer Anordnung nach der Größe.

# Dreieckszahlen

Dreieckszahlen addieren

Diagram illustrating the addition of triangular numbers using black dots and empty boxes for the result.

Row 1: 1 dot, 1 box.

Row 2: 3 dots (1+2), 2 boxes, 1 box with a plus sign, 1 box with an equals sign.

Row 3: 6 dots (1+2+3), 3 boxes, 2 boxes with plus signs, 1 box with an equals sign.

Row 4: 10 dots (1+2+3+4), 4 boxes, 3 boxes with plus signs, 1 box with an equals sign.

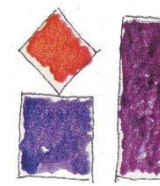
Row 5: 15 dots (1+2+3+4+5), 5 boxes, 4 boxes with plus signs, 1 box with an equals sign.

Row 6: 21 dots (1+2+3+4+5+6), 6 boxes, 5 boxes with plus signs, 1 box with an equals sign.

Row 7: 28 dots (1+2+3+4+5+6+7), 7 boxes, 6 boxes with plus signs, 1 box with an equals sign.

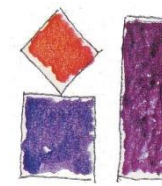
Row 8: 36 dots (1+2+3+4+5+6+7+8), 8 boxes, 7 boxes with plus signs, 1 box with an equals sign.

$\Delta 1$	1	
$\Delta 2$	3	2 Zeilen
$\Delta 3$	6	3 Zeilen
$\Delta 4$		
$\Delta 5$		
$\Delta 6$		
$\Delta 7$		
$\Delta 8$		



# Dreieckszahlen

Dreieckszahl	Vorhergehende Dreieckszahl	Addition zur Dreieckszahl	Zweiter Summand
1			
3	1	$1+2=3$	2
6	3	$3+3=6$	3
10	6	$6+4=10$	4
15	10	$10+5=15$	5
21	15	$15+6=21$	6
28	21	$21+7=28$	7

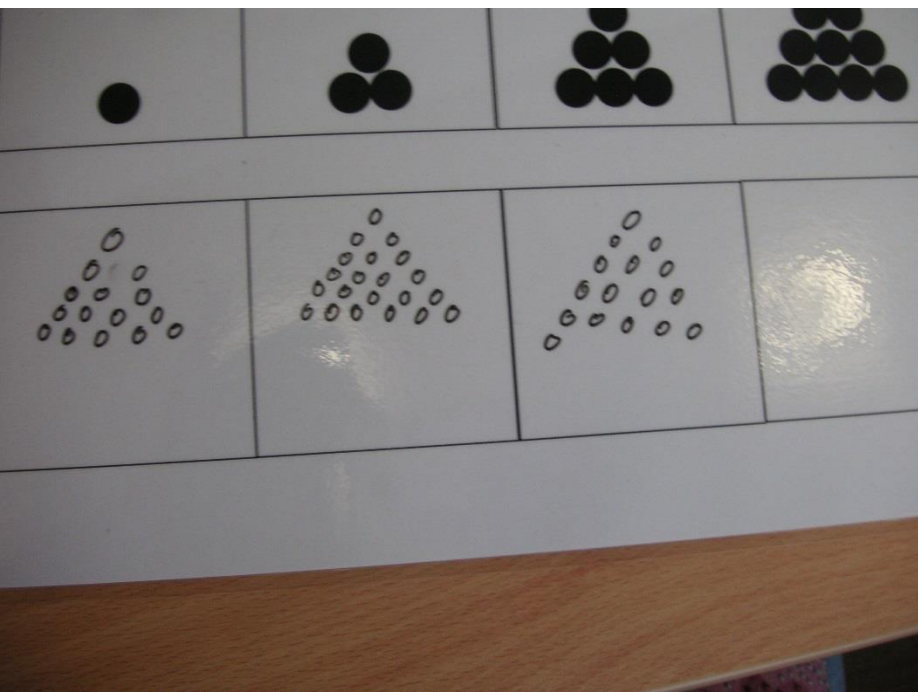
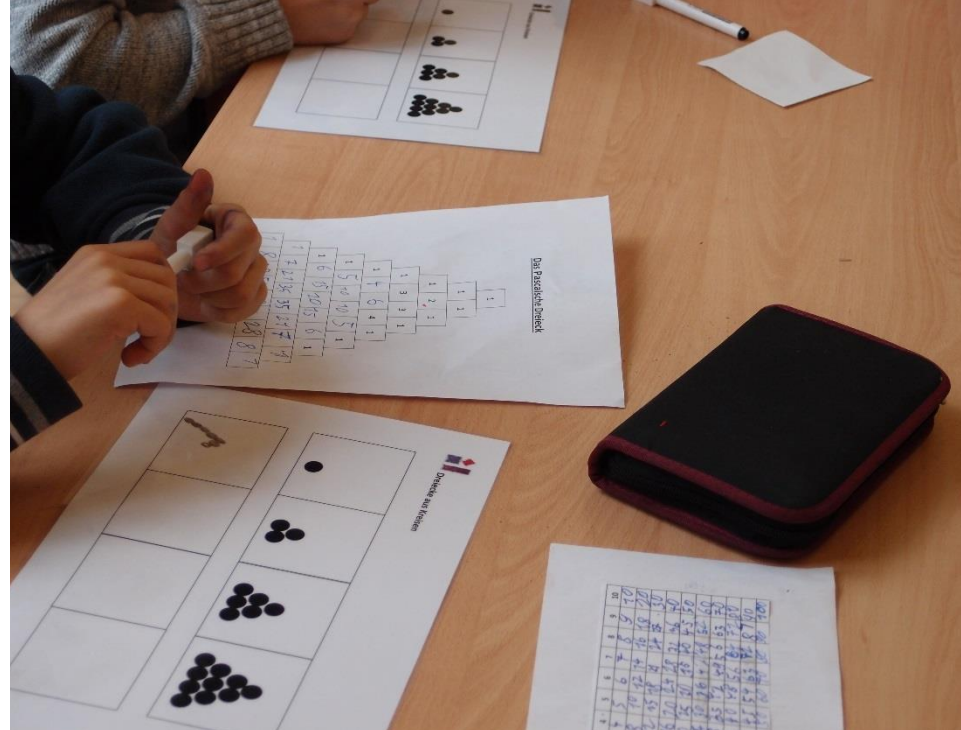


# Dreieckszahlen

basal-perzeptiv	<p><b>Unterscheidung und Diskriminierung von waagerechten Punktefeldern: ein Punkt, zwei Punkte nebeneinander, drei Punkte nebeneinander.</b></p> <p><b>Unterscheidung und Diskriminierung von einzeiligen, zweizeiligen, dreizeiligen usw. Punktefeldern.</b></p> <p><b>Reihung und Ergänzung von Punktefeldern nebeneinander und untereinander.</b></p>
konkret-gegenständlich	<p><b>Verringern und Vergrößern der figurierten Punktefelder nebeneinander und untereinander.</b></p> <p><b>Markieren der Veränderungen mit farbigen Plättchen.</b></p> <p><b>Ergänzen und Fortführen der Punktefelder.</b></p>
anschaulich-symbolisch	<p><b>Veränderungen zwischen den verschiedenen Dreieckszahlen dokumentieren durch Aufmalen und durch Zahlen (+1; +2; +3 usw.).</b></p>
abstrakt-begrifflich	<p><b>Die Veränderungen innerhalb der arithmetischen Reihe beschreiben und in Rechenthermen ausdrücken.</b></p>

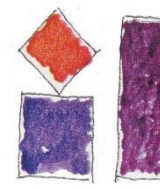
Zugangsebenen zur arithmetischen Folge der Dreieckszahlen.



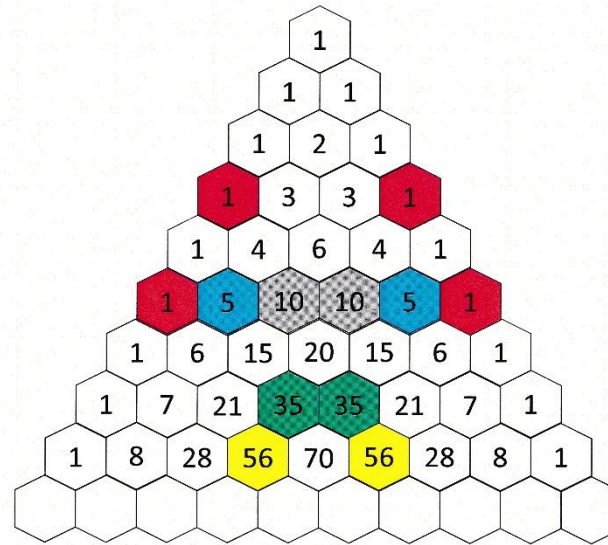




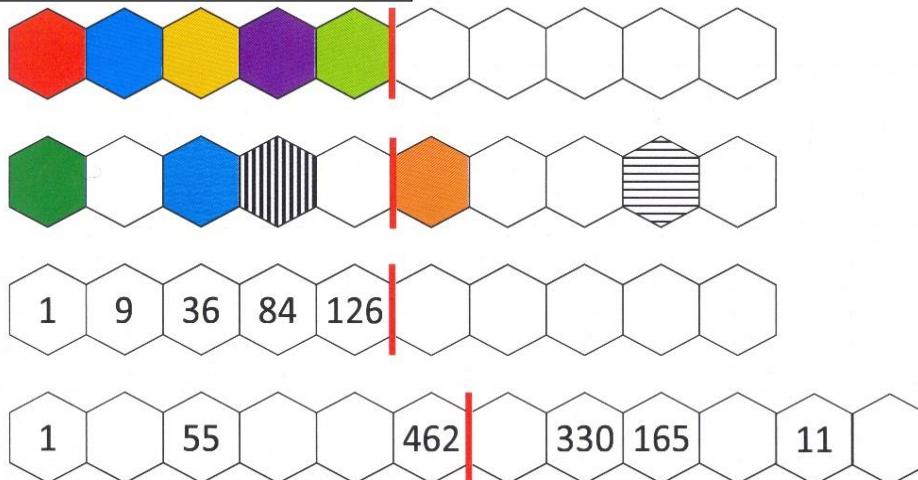
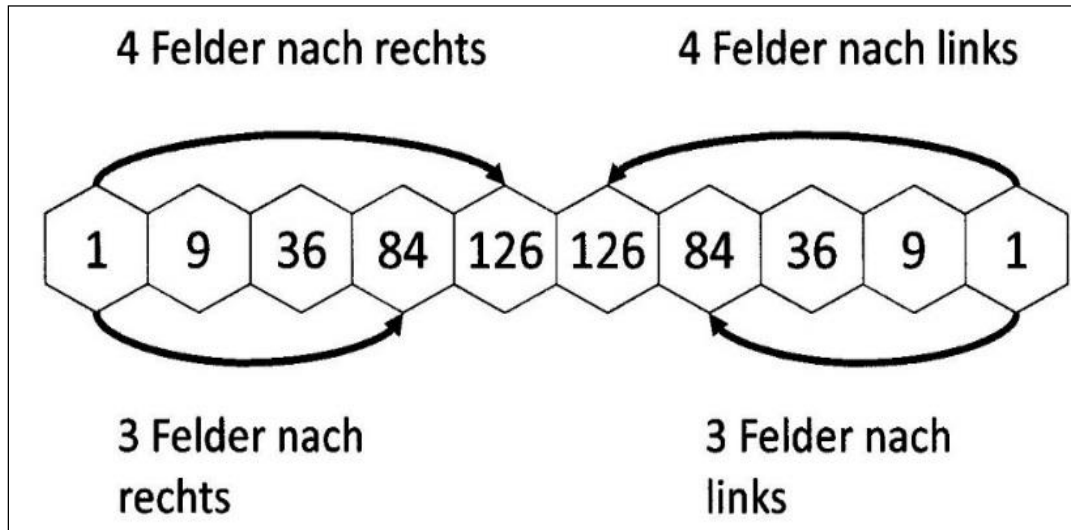




# Symmetrie



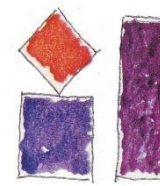
# Symmetrie





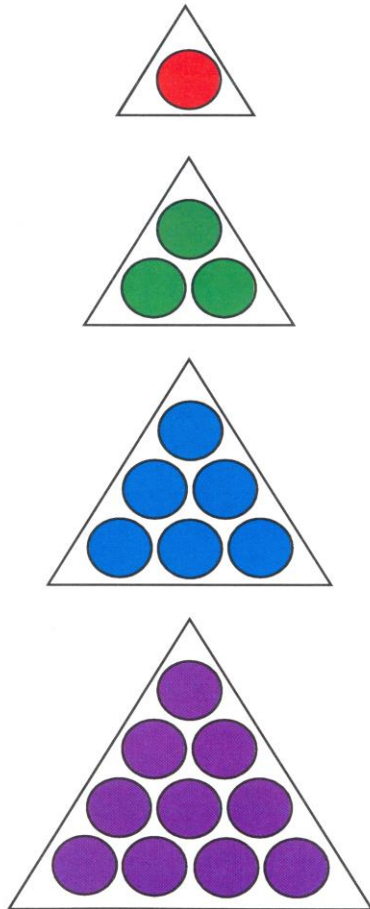






# Tetraederzahlen

Dreieckszahlen

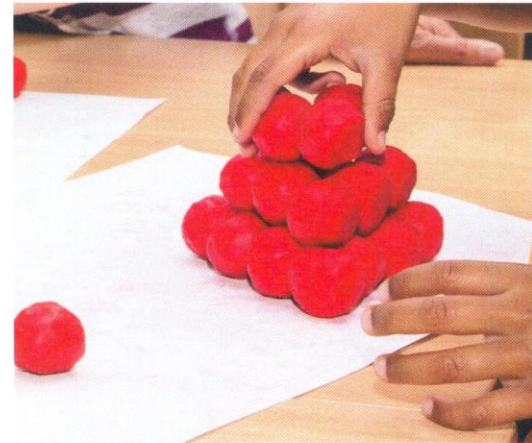


1

$$1+2=3$$

$$1+2+3=6$$

$$1+2+3+4=10$$

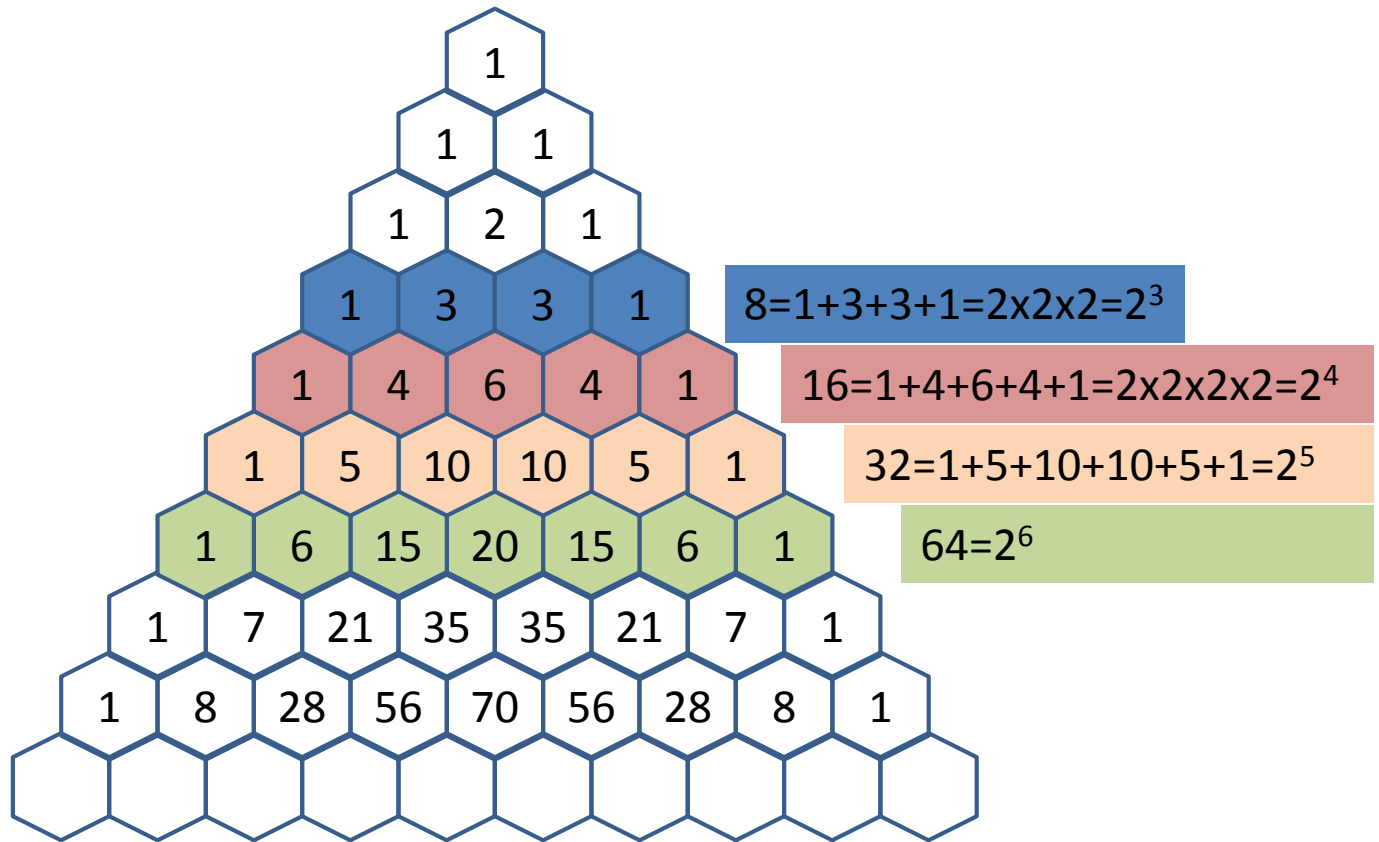


Tetraederzahl

$$1+3+6+10=20$$



# Zeilensummen verdoppeln sich

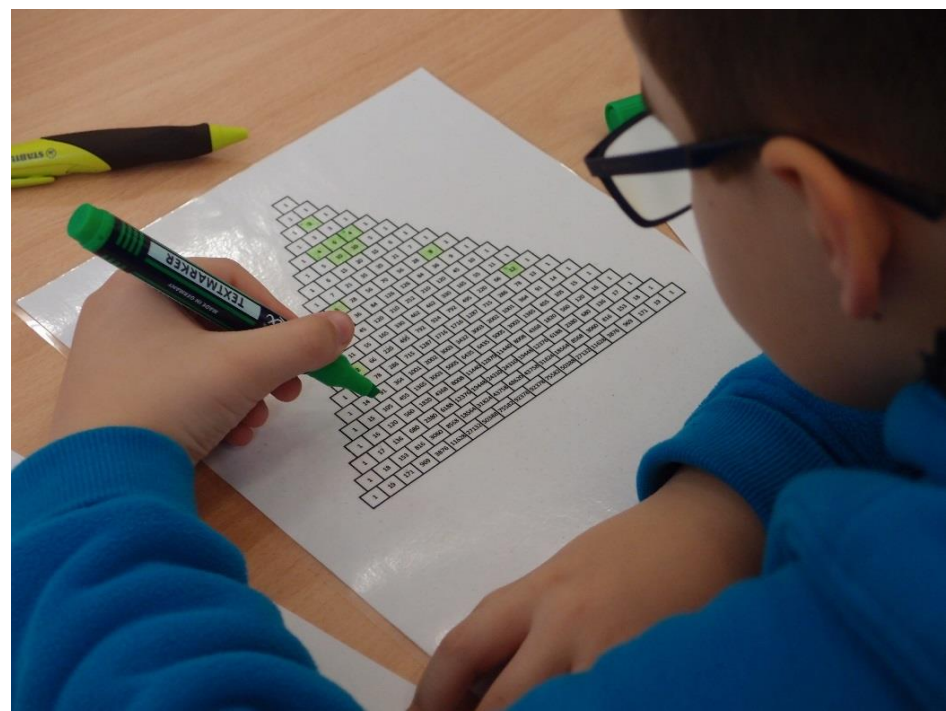
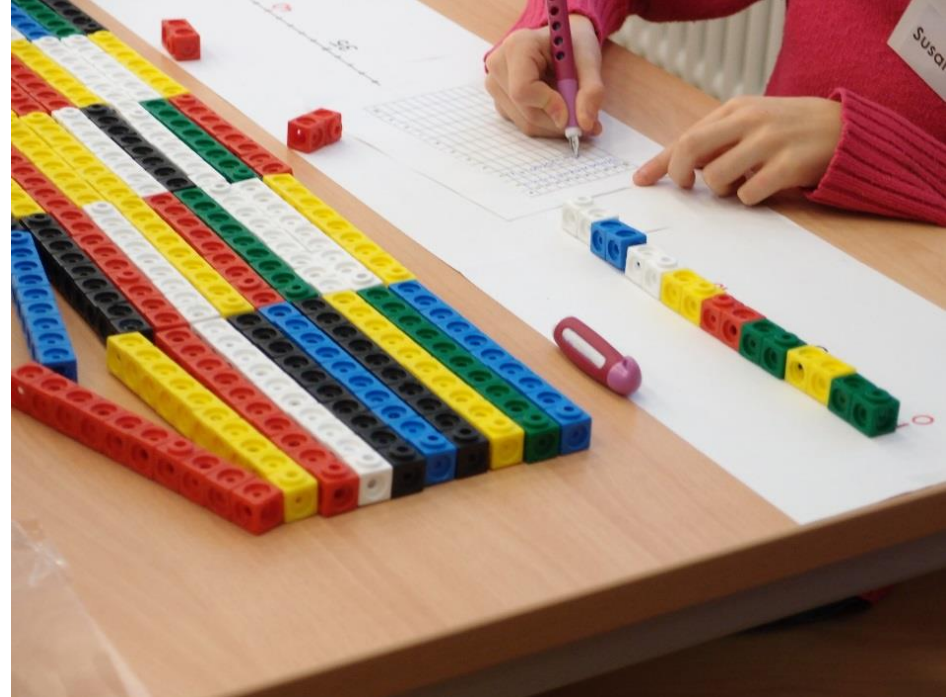


# Zeilensummen verdoppeln sich

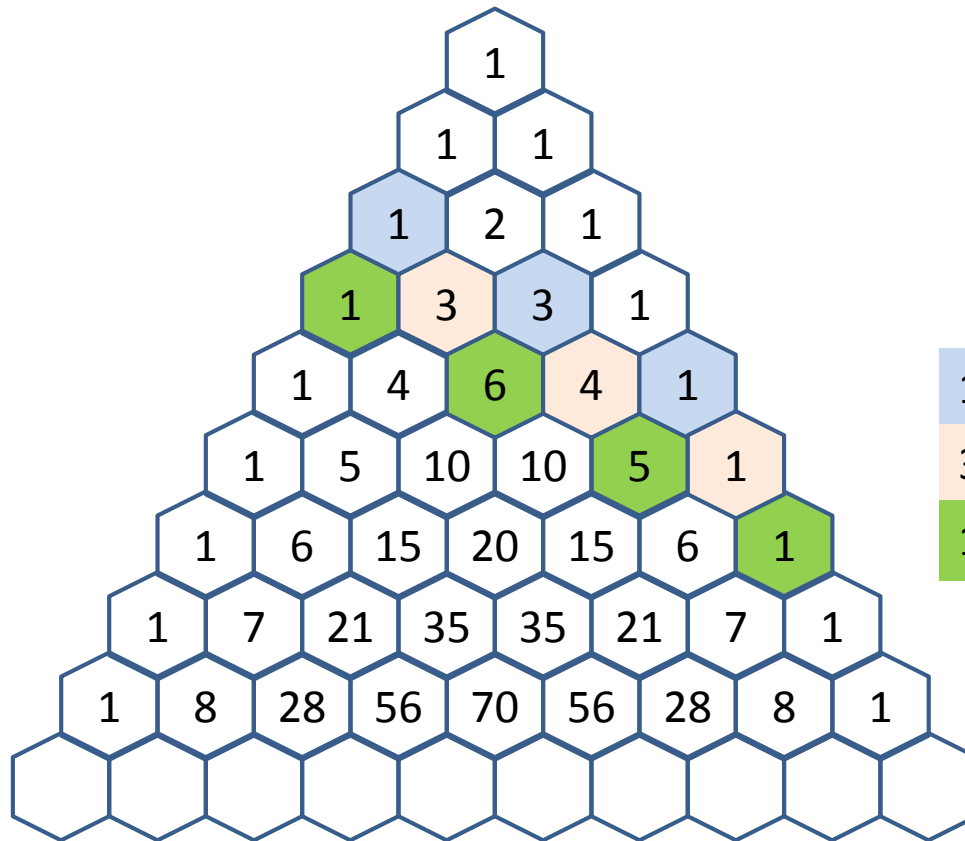


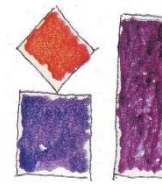
teilbar durch 2









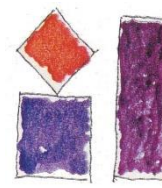
# Die Fibonacci-Zahlen



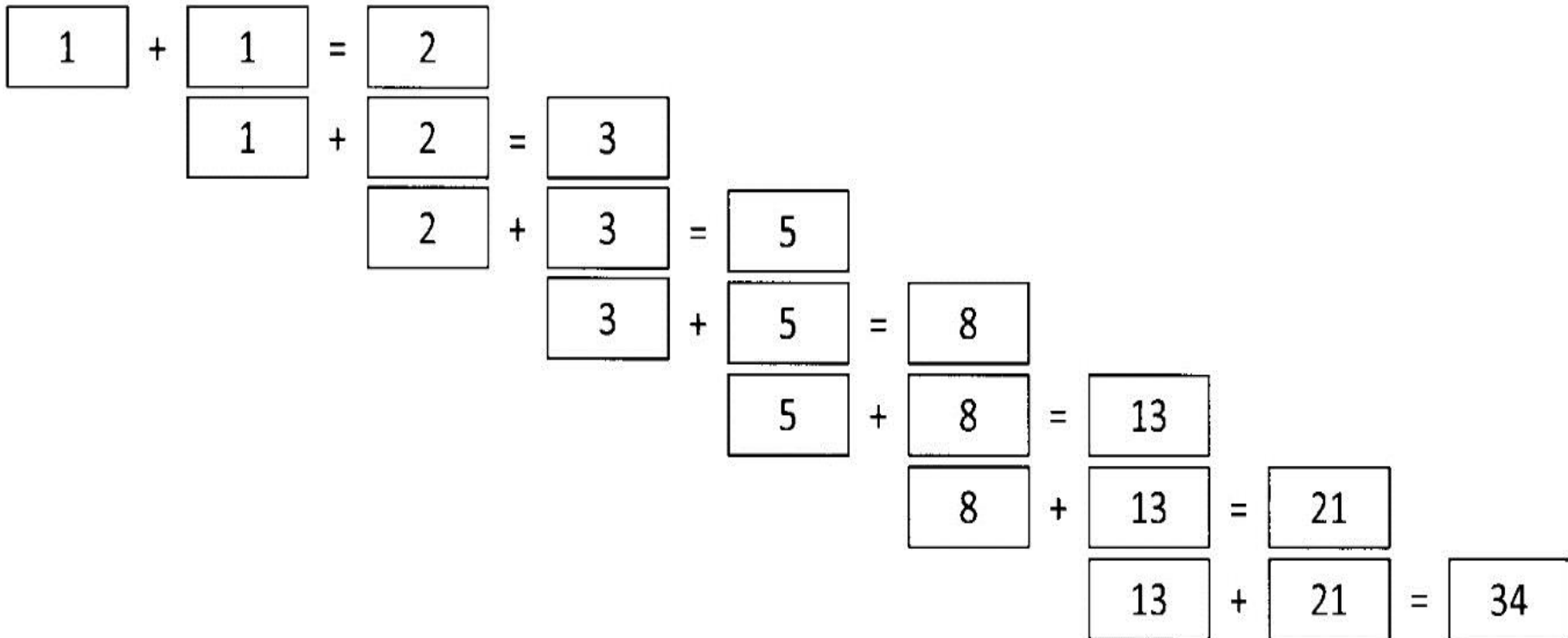


# Bilden der Fibonacci-Zahlen

-  Die Fibonacci-Folge entsteht, wenn jedes Glied der Folge als Summe der beiden vorhergehenden Glieder berechnet wird.
-  Auszugehen ist dabei von den ersten beiden Gliedern 1,1.
-  Das führt zu 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...
-   $1+1=2$ ;  $1+2=3$ ;  $2+3=5$ ;  $3+5=8$ ;  $5+8=13$ ;  $8+13=21$ ;  $13+21=34$

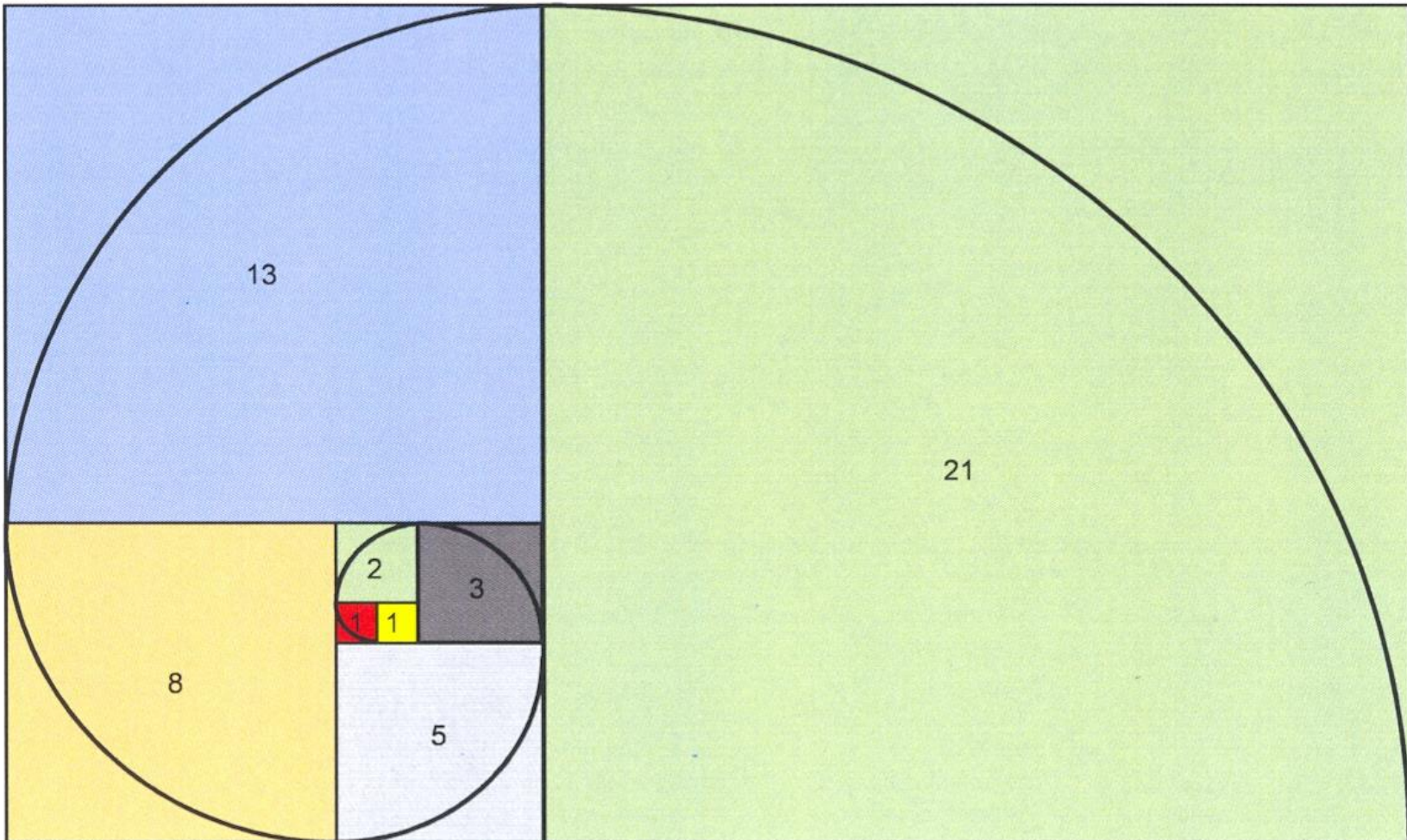


# Die Fibonacci-Zahlen

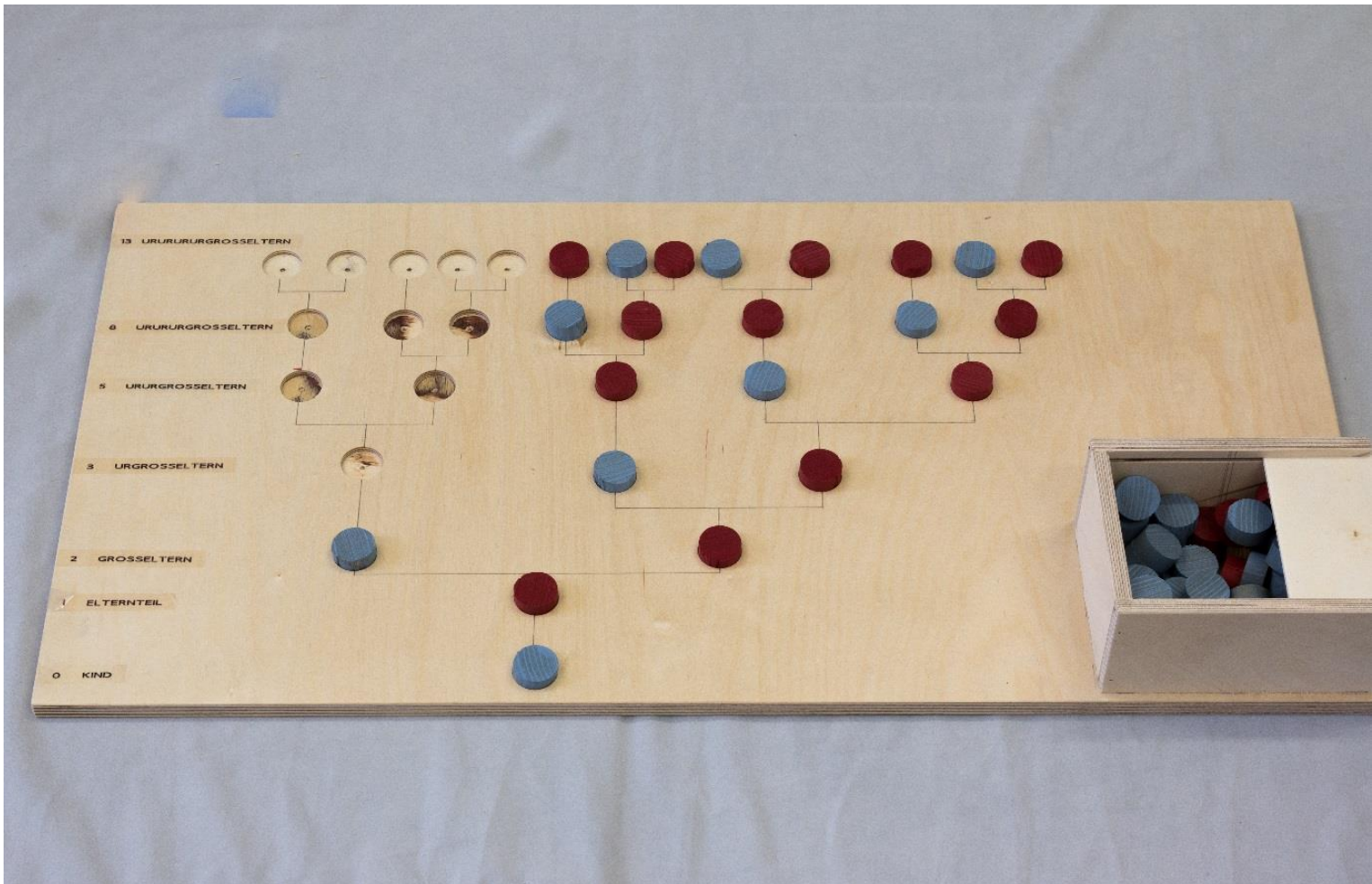




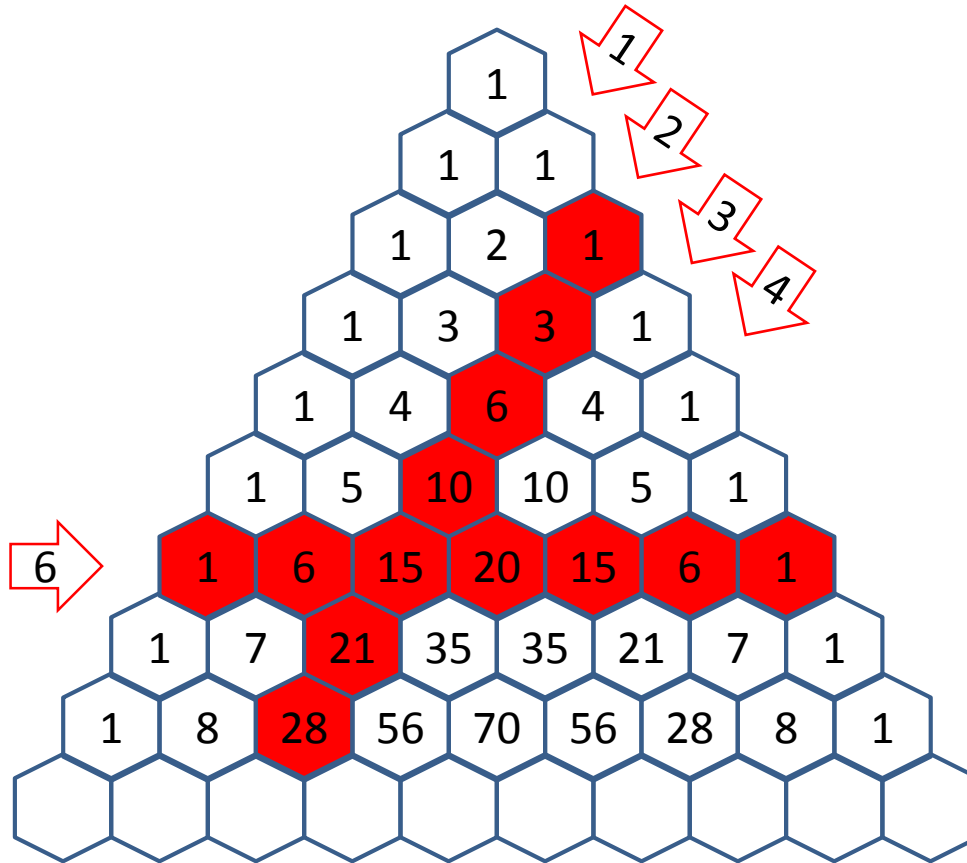
# Die Fibonacci-Zahlen



# Die Fibonacci-Zahlen



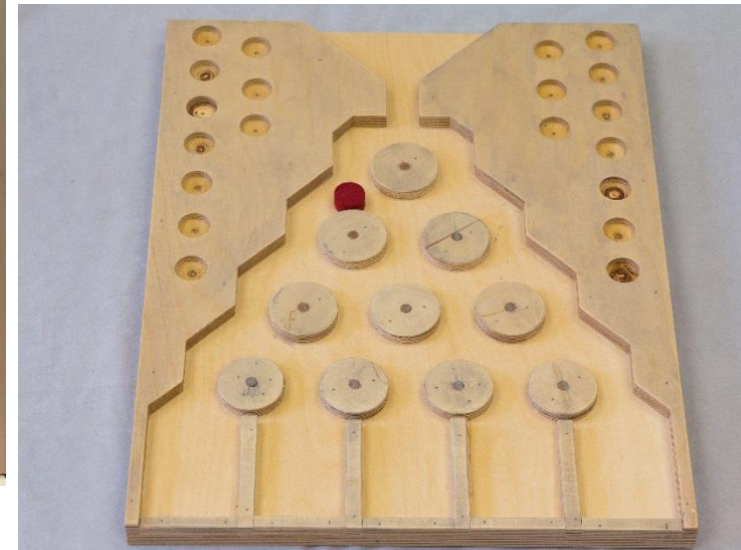
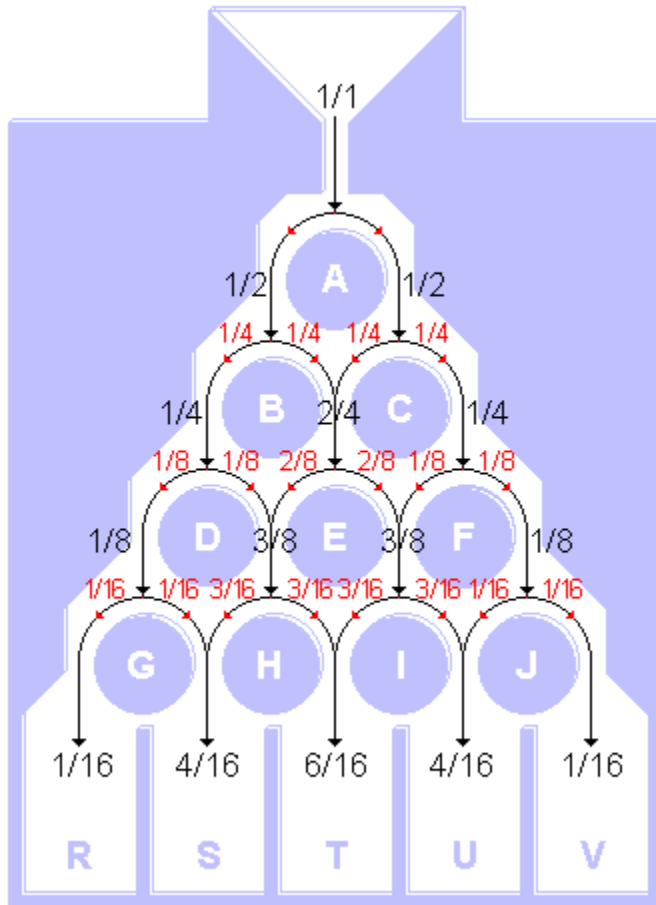
# Die Binomialkoeffizienten







$$\binom{6}{3} = \frac{6!}{3!(6-3)!} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3} = 20$$



# Wahrscheinlichkeiten



# Innere und äußere Schulreform in Zeiten der Inklusion

-  Gleichzeitigkeit und Dynamisierung
-  Gefährdungen
-  Chancen und Entwicklungsmöglichkeiten
-  Gemeinsamer Unterricht im Spannungsfeld von Individualisierung/Differenzierung und gemeinsamen Lernen



## Literaturverzeichnis

Ernst, Karin (1996a): Den Fragen der Kinder Raum geben. In: Die Grundschulzeitschrift 1996/10. S. 40-45.

Feuser, Georg (2005): Behinderte Kinder und Jugendliche zwischen Integration und Aussonderung. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft.

Feuser, Georg (2011): Entwicklungslogische Didaktik. In: Kaiser, Astrid/Schmetz, Ditmar/Wachtel, Peter/Werner, Birgt (Hrsg.): Didaktik und Unterricht. Stuttgart: Kohlhammer Verlag. S. 86-100.

Goschler, Walter (2012): Lernwerkstätten und Inklusion. In: Breyer, Cornelius/Fohrer, Günther/Goschler, Walter/Heger, Manuela/Kießling, Christina/Ratz, Christoph (Hrsg.): Sonderpädagogik und Inklusion. Oberhausen: Athena-Verlag. S. 227-241.

Goschler, Walter (2016): Gemeinsames Lernen in heterogenen Gruppen – Das Pascalsche Dreieck im Spannungsfeld zwischen Individualisierung/Differenzierung und gemeinsamen Lernen. In: Schmude, Corinna/Wedekind, Hartmut (Hrsg.): Lernwerkstätten an Hochschulen – Orte einer inklusiven Pädagogik. Bad Heilbrunn: Verlag Julius Klinkhardt. S. 127-144.

Goschler, Walter (2017 in Vorbereitung): Lernwerkstattarbeit und gemeinsamer Unterricht anhand mathematischer Muster rund um das Pascalsche Dreieck – ein Beitrag zu einer inklusiven Didaktik in Theorie und Praxis

Kutzer, Reinhard (1998): Mathematik entdecken und verstehen. Kommentarband 1. Frankfurt am Main: Verlag Moritz Diesterweg.

Markowetz, Reinhard (2004): Alle Kinder alles lehren! Aber wie? - Maßnahmen der Inneren Differenzierung und Individualisierung als Aufgabe für Sonderpädagogik und Allgemeine (Integrations-)Pädagogik auf dem Weg zu einer inklusiven Didaktik. In: Schnell, Imtraud/Sander, Alfred (Hrsg.): Inklusive Pädagogik. Bad Heilbrunn: Klinkhardt Verlag. S. 167-186.

Markowetz, Reinhard (2012): Inklusive Didaktik (k)eine Neuschöpfung!? Ein Beitrag zur didaktischen Diskussion über Gemeinsamen Unterricht. In: Breyer, Cornelius/Fohrer, Günther/Goschler, Walter/Heger, Manuela/Kießling, Christina/Ratz, Christoph (Hrsg.): Sonderpädagogik und Inklusion. Oberhausen: Athena Verlag. S. 141-160.

Markowetz, Reinhard (2016): Theoretische Aspekte und didaktische Dimensionen inklusiver Unterrichtspraxis. In: Fischer, Erhard/Markowetz, Reinhard (Hrsg.): Inklusion im Förderschwerpunkt geistige Entwicklung. Stuttgart: Kohlhammer Verlag. S. 239-288.

Sasse, Ada/Schulzeck, Ursula (2013): Differenzierungsmatrizen als Modell der Planung und Reflexion inklusiven Unterrichts – zum Zwischenstand in einem Schulversuch. In: Jantowski, Andreas (Hrsg.): Gemeinsam leben. Miteinander lernen. Bad Berka: Thüringer Institut für Lehrerfortbildung, Lehrplanentwicklung und Medien (Thilm). S. 13-22.

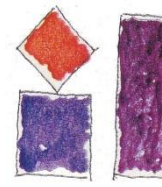
Wocken, Hans (1998): Gemeinsame Lernsituationen. Eine Skizze zur Theorie des gemeinsamen Unterrichts. In: Hildeschiedt, Anne/Schnell, Imtraud (Hrsg.): Integrationspädagogik. Auf dem Weg zu einer Schule für alle. Weinheim/München: Juventa. S. 37-52.

Wocken, Hans (2011): Das Haus der inklusiven Schule. Baustellen – Baupläne – Bausteine. Hamburg: Feldhaus Verlag.

Wocken, Hans (2013): Zum Haus der inklusiven Schule. Ansichten – Zugänge – Wege. Hamburg: Feldhaus Verlag.

Wocken, Hans (2014): Im Haus der inklusiven Schule. Grundrisse – Räume – Fenster. Hamburg: Feldhaus Verlag.





Vielen Dank für Ihre  
Aufmerksamkeit

Walter Goschler